数理解析研究所講究録
1180 巻 2000 年 191-200

A Universal Disentangling Formula for Coherent States of Perelomov's Type

横浜市立大学理学部　藤井 一幸 (Kazuyuki Fujii)
Faculty of Science, Yokohama City Univ.
早稲田大学理工学部　鈴木 達夫 (Tatsuo Suzuki)*
School of Science and Engineering, Waseda Univ.

概 要

generalized oscillator algebra に対して Perelomov type の coherent state を計算する公式 (universal disentangling formula) を与え，例として oscillator algebra と $\mathfrak{su}(1,1)$ の場合にその公式を適用する．

1 Introduction

coherent state は量子物理，特に量子光学では重要な役割を果たしている．([1] などを参照.) 経路積分に対しては，coherent state を用いた coherent 表示が非常に有用である．([1], [2], [3], [4] を参照．) また最近では，幾何学的量子コンピューターの理論にも用いられている．([5], [6] などを参照．)

詳しいことは次節以降にまわすことにして，まず我々の考える問題の概略を述べる．oscillator algebra (harmonic oscillator) の生成・消滅演算子をそれぞれ $a^\dagger$, a とし，それらの作用する Fock space の（正規化された）vacuum vector を $|0\rangle$ とする．coherent state $|z\rangle$ は a の固有関数として定義される．

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad \text{for} \quad \forall z \in \mathbf{C}. \tag{1.1}$$

*講演者

この $|z\rangle$ は次のように書ける.

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}\mathrm{e}^{za^\dagger}|0\rangle = \mathrm{e}^{za^\dagger - \bar{z}a}|0\rangle.$$

二番目の等号にはBaker-Campbell-Hausdorff の公式

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,B]}\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} \tag{1.2}$$

(ただし, $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$) を使った. 次に $\{K_+, K_-, K_3\}$ で $\mathfrak{su}(1,1)$ の spin K $(K \geq 1/2)$ 表現を表す. これに対し, Perelomov は vacuum vector に unitary operator (coherent operator) を作用させたものとして次のような coherent state を定義した.

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{zK_+ - \bar{z}K_-}|K,0\rangle \quad \text{for} \quad \forall z \in \mathbf{C}, \tag{1.3}$$

([7], [1] を参照.) これを計算して, その algebra の性質が反映される形 (oscillator algebra なら $\mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}\mathrm{e}^{za^\dagger}|0\rangle$) にしたい. この場合にはBaker-Campbell-Hausdorffの公式 (1.2) は適用できないが, Lie group $SU(1,1)$ の Gauss 分解と離散表現を用いて公式

$$\mathrm{e}^{zK_+ - \bar{z}K_-} = \mathrm{e}^{\zeta K_+}\mathrm{e}^{\log(1-|\zeta|^2)K_3}\mathrm{e}^{-\bar{\zeta}K_-} \quad \text{ただし} \quad \zeta = (z\tanh|z|)/|z| \tag{1.4}$$

([7], [8] を参照) が示される. これより,

$$|z\rangle = (1-|\zeta|^2)^K \mathrm{e}^{\zeta K_+}|K,0\rangle \qquad \text{for} \quad 2K = 1, 2, \cdots \tag{1.5}$$

が求まる.

そこで, 我々はgeneralized oscillator algebra $\mathcal{A} = \{1, A, A^\dagger, N\}$ に対して, Perelomov type の coherent state

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{zA^\dagger - \bar{z}A}|0\rangle \quad \text{for} \quad \forall z \in \mathbf{C}. \tag{1.6}$$

を計算する公式 (universal disentangling formula) を与え, それを用いて上の 2 つを統一的に求めた.

2 Oscillator algebra の Coherent State について

後のために oscillator algebra を次のように書いておく.

$$\{1, a, a^\dagger, N \equiv a^\dagger a\},$$

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger,\ [N, a] = -a,\ [a, a^\dagger] = 1. \tag{2.1}$$

a と $a^\dagger$ の作用する Fock space を $\mathcal{H} \equiv \{|n\rangle\ |n \geq 0\}$ とし，その作用を次で定義する．

$$\begin{aligned} a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ a\ |n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ N|n\rangle &= n|n\rangle, \end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで， $|0\rangle$ は 正規化された vacuum (i.e. $a|0\rangle = 0$ かつ $\langle 0|0\rangle = 1$).

(2.2) より $|n\rangle$ は次で与えられる．

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \tag{2.3}$$

これらは直交性と完全性の条件を満たす．

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1. \tag{2.4}$$

定義 2.1 *coherent state* とは，次を満たす $|z\rangle$ のことである．

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad \textit{for} \quad \forall z \in \mathbf{C}. \tag{2.5}$$

(ただし，$\langle z|z\rangle = 1$ と正規化しておく.)

oscillator algebra の coherent state を求めよう．正規化されていない coherent state を $|z)$ と書いて

$$a|z) = z|z) \quad \text{for} \quad \forall z \in \mathbf{C}. \tag{2.6}$$

を解くと，$|z)$ は次のように書ける．

$$\begin{aligned} |z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(za^\dagger)^n}{n!}|0\rangle = \mathrm{e}^{za^\dagger}|0\rangle. \end{aligned}$$

$(z|z) = \mathrm{e}^{|z|^2}$ であるので，（正規化された）coherent state は次のようになる．

$$|z\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{(z|z)}}\mathrm{e}^{za^\dagger}|0\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}\mathrm{e}^{za^\dagger}|0\rangle. \tag{2.7}$$

Baker-Campbell-Hausdorff の公式

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^{A}e^{B} \tag{2.8}$$

（ただし，$[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$）を使うと，これは次のように書きなおすこともできる．

$$|z\rangle = e^{za^\dagger - \bar{z}a}|0\rangle. \tag{2.9}$$

定義 2.2

$$|z\rangle = e^{za^\dagger - \bar{z}a}|0\rangle. \tag{2.10}$$

の形の $|z\rangle$ を *Perelomov type* の *coherent state* と呼ぶ．

Perelomov type の coherent state は，vacuum vector に unitary operator (coherent operator) $e^{za^\dagger - \bar{z}a}$ を作用させたものになっているのが特徴である．

注意 2.3 今見たように，*oscillator algebra* の場合，

$$\text{定義 } 2.1 = \text{定義 } 2.2 \tag{2.11}$$

しかし，以下に見るように *generalized oscillator algebra* の場合は，

$$\text{定義 } 2.1 \neq \text{定義 } 2.2 \tag{2.12}$$

である．

以後，Perelomov type の coherent state のみ考える．

3 $\mathfrak{su}(1,1)$ に対する Perelomov Type の Coherent States について

$\{k_+, k_-, k_3\}$ を $\mathfrak{su}(1,1) \subset \mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ の Weyl basis とする．

$$k_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$[k_3, k_+] = k_+, \quad [k_3, k_-] = -k_-, \quad [k_-, k_+] = 2k_3. \tag{3.1}$$

次に，$\mathfrak{su}(1,1)$ の spin K $(K \geq 1/2)$ 表現を考え，その生成元を $\{K_+, K_-, K_3\}$,

$$[K_3, K_+] = K_+, \quad [K_3, K_-] = -K_-, \quad [K_-, K_+] = 2K_3 \tag{3.2}$$

とする．$\{K_+, K_-, K_3\}$ の作用する Fock space を $\mathcal{H}_K \equiv \{|K,n\rangle \; | n \geq 0\}$ とし，作用を次で定義する．

$$
\begin{aligned}
K_+|K,n\rangle &= \sqrt{(n+1)(2K+n)}|K,n+1\rangle, \\
K_-|K,n\rangle &= \sqrt{n(2K+n-1)}|K,n-1\rangle, \\
K_3|K,n\rangle &= (K+n)|K,n\rangle,
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

ここで，$|K,0\rangle$ は 正規化された vacuum ($K_-|K,0\rangle = 0$ かつ $\langle K,0|K,0\rangle = 1$). (3.3) より $|K,n\rangle$ は次で与えられる．

$$|K,n\rangle = \frac{(K_+)^n}{\sqrt{n!(2K)_n}}|K,0\rangle, \tag{3.4}$$

ここで $(a)_n$ は Pochammer の記号

$$(a)_n \equiv a(a+1)\cdots(a+n-1).$$

これらは直交性と完全性の条件を満たす．

$$\langle K,m|K,n\rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}|K,n\rangle\langle K,n| = 1_K. \tag{3.5}$$

次に Perelomov type の coherent state を考える．

$$|z\rangle \equiv \mathrm{e}^{zK_+ - \bar{z}K_-}|K,0\rangle \quad \text{for} \quad \forall z \in \mathbf{C}. \tag{3.6}$$

これには Baker-Campbell-Hausdorff の公式 (2.8) は使えない．しかし次が成り立つ．

補題 3.1 $\zeta = (z \tanh|z|)/|z| \quad (z \in \mathbf{C})$ とおくと，

$$e^{zK_+ - \bar{z}K_-} = e^{\zeta K_+} e^{\log(1-|\zeta|^2)K_3} e^{-\bar{\zeta}K_-}. \tag{3.7}$$

証明は次のようにする．ρ_K $(2K = 1, 2, \cdots)$ を Lie 群 $SU(1,1)$ の spin K の離散表現とする．このとき，

$$K_+ = d\rho_K(k_+),\ K_- = d\rho_K(k_-),\ K_3 = d\rho_K(k_3). \tag{3.8}$$

であるので，$SU(1,1)$ の Gauss 分解

$$\mathrm{e}^{zk_+ - \bar{z}k_-} = \mathrm{e}^{\zeta k_+}\mathrm{e}^{\log(1-|\zeta|^2)k_3}\mathrm{e}^{-\bar{\zeta}k_-} \quad \text{ただし} \quad \zeta = (z\tanh|z|)/|z|, \tag{3.9}$$

を用いると

$$\begin{aligned} e^{zK_+-\bar{z}K_-} &= e^{d\rho_K(zk_+-\bar{z}k_-)} \\ &= \rho_K(e^{zk_+-\bar{z}k_-}) \\ &= \rho_K(e^{\zeta k_+})\rho_K(e^{\log(1-|\zeta|^2)k_3})\rho_K(e^{-\bar{\zeta}k_-}) \\ &= e^{d\rho_K(\zeta k_+)}e^{d\rho_K(\log(1-|\zeta|^2)k_3)}e^{d\rho_K(-\bar{\zeta}k_-)} \\ &= e^{\zeta K_+}e^{\log(1-|\zeta|^2)K_3}e^{-\bar{\zeta}K_-}. \end{aligned}$$

この補題と (3.3) より

$$|z\rangle = (1-|\zeta|^2)^K e^{\zeta K_+}|K,0\rangle \quad \text{for} \quad 2K = 1,2,\cdots \tag{3.10}$$

を得る.

注意 3.2 上の計算は $2K = 1,2,\cdots$ に制限されている.

これらの結果を統一的に与える公式を次節で与える.

4 A Universal Disentangling Formula

$\mathcal{A} \equiv \{1, A, A^\dagger, N\}$ を generalized oscillator algebra とする.([9], [10] を参照.) その関係式は次で定義される.

$$[N, A^\dagger] = A^\dagger, \quad [N, A] = -A, \quad [A, A^\dagger] = F(N+1) - F(N), \tag{4.1}$$

ここで F は $F(0) = 0$ かつ $F(n) > 0$ $(n > 0)$ を満たす整関数. この algebra は Fock space$\{|n\rangle\ |n \geq 0\}$ に次のように作用する.

$$\begin{aligned} A^\dagger|n\rangle &= \sqrt{F(n+1)}|n+1\rangle, \\ A|n\rangle &= \sqrt{F(n)}|n-1\rangle, \\ N|n\rangle &= n|n\rangle, \end{aligned} \tag{4.2}$$

ここで $|0\rangle$ は 正規化された vacuum とする. (4.2) より, $|n\rangle$ は次のように書ける.

$$|n\rangle = \frac{(A^\dagger)^n}{\sqrt{\prod_{j=1}^n F(j)}}|0\rangle. \tag{4.3}$$

これらは直交性と完全性の条件を満たす．

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1. \tag{4.4}$$

これに対し，Perelomov type の coherent state を計算したい．

$$|z\rangle \equiv \mathrm{e}^{zA^{\dagger}-\bar{z}A}|0\rangle \quad \text{for} \quad \forall z \in \mathbf{C}. \tag{4.5}$$

我々の結果は次の定理である．

定理 4.1 *generalized oscillator algebra* に対する *Perelomov type* の *coherent state* は次で与えられる．

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+2j)!}\Delta(n+1,j)(-|z|^2)^j\right\}\frac{(zA^{\dagger})^n}{n!}|0\rangle, \tag{4.6}$$

ここで $\Delta(n+1,j)$ は次式で定義される：

$$\begin{aligned}
&\Delta(n+1,0) = 1,\\
&\Delta(n+1,j) = \sum_{k_1=1}^{n+1}F(k_1)\sum_{k_2=1}^{k_1+1}F(k_2)\cdots\sum_{k_j=1}^{k_{j-1}+1}F(k_j).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

注意 4.2 $\Delta(n+1,j)$ は次の差分方程式の解である．

$$\begin{aligned}
\Delta(n+1,j) &= \Delta(n,j) + F(n+1)\Delta(n+2,j-1),\\
\Delta(n+1,0) &= 1.
\end{aligned}$$

(4.7) は "path-ordered integral の離散版" に似ている．

まず (4.6) を oscillator algebra $F(n)=n$ の場合に適用してみる．よく知られた公式

$$\sum_{k=1}^{n}(k)_j = \frac{(n)_{j+1}}{j+1}$$

を用いると，

$$\Delta(n+1,j) = \frac{(n+1)_{2j}}{(2j)!!} = \frac{(n+2j)!}{n!2^j j!} \tag{4.8}$$

であるので，

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+2j)!}\Delta(n+1,j)(-|z|^2)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-|z|^2)^j}{2^j j!} = \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}. \tag{4.9}$$

となる．これより，

系 4.3

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{zA^\dagger}|0\rangle.$$

これは2節の結果に一致する．

次に，(4.6) を $\mathfrak{su}(1,1)$ の spin K 表現

$$F(n) = n(2K+n-1) \quad \text{for} \quad 2K \geq 1. \tag{4.10}$$

に適用してみる．しかし，$\Delta(n+1,j)$ を直接求めるのは困難であることがわかる．そこで次のように書きかえる．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{zA^\dagger - \bar{z}A}|0\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{n!}{(n+2j)!}\Delta(n+1,j)|z|^{2j}\right\}\frac{(zA^\dagger)^n}{n!}|0\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{n!}{(n+2j)!}\Delta(n+1,j)|z|^{2j+n}\right\}\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{|z|}A^\dagger\right)^n|0\rangle \\
&\equiv \sum_{n=0}^{\infty} I_n(|z|)\,\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{|z|}A^\dagger\right)^n|0\rangle.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$r = |z|$ として，

$$I_n(r) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{n!}{(n+2j)!}\Delta(n+1,j)r^{2j+n}. \tag{4.12}$$

を考え，$\{I_n(r)\ |n \geq 0\}$ の満たす微分方程式を求める．

命題 4.4 $n \geq 0$ に対し，

$$\frac{d}{dr}I_n(r) = nI_{n-1}(r) - \frac{F(n+1)}{n+1}I_{n+1}(r) \tag{4.13}$$

かつ

$$I_n(r) \sim r^n \quad \textit{for} \quad 0 < r \ll 1. \tag{4.14}$$

試しに命題 4.4 を oscillator algebra $F(n) = n$ の場合に当てはめてみよう．(4.13) は

$$\frac{d}{dr}I_n = nI_{n-1} - I_{n+1}. \tag{4.15}$$

このとき，条件 (4.14) の下で，解は

$$I_n(r) = \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r^n. \tag{4.16}$$

よって (4.11) より

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(zA^\dagger)^n|0\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}} \mathrm{e}^{zA^\dagger}|0\rangle. \tag{4.17}$$

そこで，再び (4.10) を考える．

$$F(n) = n(2K + n - 1) \quad \text{for} \quad 2K \geq 1.$$

(4.13) は

$$\frac{d}{dr} I_n = nI_{n-1} - (2K + n)I_{n+1}. \tag{4.18}$$

このとき，条件 (4.14) の下で，解は

$$\begin{aligned} I_n(r) &= (\cosh r)^{-2K-n}(\sinh r)^n \\ &= (\cosh r)^{-2K}(\tanh r)^n = (1 - \tanh^2 r)^K(\tanh r)^n \end{aligned} \tag{4.19}$$

と求まり，

$$\begin{aligned} |z\rangle &= (1 - \tanh^2 |z|)^K \sum_{n=0}^{\infty}(\tanh |z|)^n \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{|z|}K_+\right)^n |K, 0\rangle \\ &= (1 - \tanh^2 |z|)^K \mathrm{e}^{\tanh |z| \frac{z}{|z|} K_+}|K, 0\rangle. \end{aligned} \tag{4.20}$$

$\zeta = (z \tanh |z|)/|z|$ とおけば,

系 4.5

$$|z\rangle = (1 - |\zeta|^2)^K e^{\zeta K_+}|K, 0\rangle \quad \textit{for} \quad 2K \geq 1. \tag{4.21}$$

これより，(4.6) は今まで知られていた結果を統一的に与える公式といえる．

注意 4.6 *3* 節の方法では, *Lie* 群 $SU(1,1)$ の *Gauss* 分解と離散表現を用いたため，*spin* K を半整数に制限する必要があったが，我々は *(4.6)* を用いることにより，系 *4.5* を任意の *spin* $K \geq 1/2$ に対して証明した．それ故，系 *4.5* は *(3.10)* の一般化と言える．

参考文献

[1] J.R. Klauder and Bo-S. Skagerstam, *Coherent States* (World Scientific, Singapore, 1985).

[2] K. Funahashi, T. Kashiwa, S. Sakoda and K. Fujii, J. Math. Phys. **36** (1995) 3232.

[3] K. Funahashi, T. Kashiwa, S. Sakoda and K. Fujii, J. Math. Phys. **36** (1995) 4590.

[4] K. Fujii, T. Kashiwa and S. Sakoda, J. Math. Phys. **37** (1996) 567.

[5] K. Fujii, J. Math. Phys. **41** (2000) 4406.

[6] P. Zanardi, M. Rasetti, Phys. Lett. A. **264** (1999) 94.

[7] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1986).

[8] H-C. Hu and R. Sasaki, J. Math. Phys. **38** (1997) 3968.

[9] C. Quesne and N. Vansteenkiste, Phys. Lett. A. **240** (1998) 21.

[10] S. Klishevich and M. Plyushchay, Supersymmetry of parafermions, hep-th/9905149.